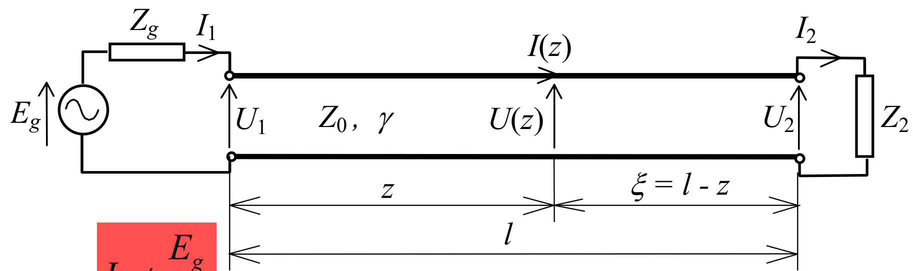
Elementy teorii linii transmisyjnej (linii długiej)

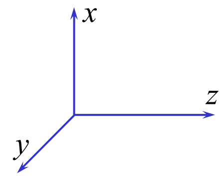
Karol Aniserowicz

Linia długa



$$I_1 \neq \frac{E_g}{Z_g}$$

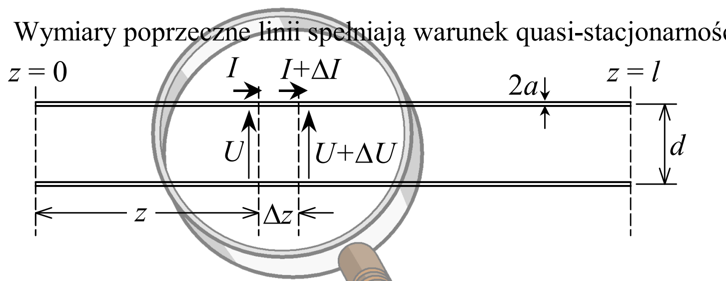
$$I_1 = \frac{E_g}{Z_g + Z_{we}}$$



przyjęty układ współrzędnych

Schemat zastępczy odcinka linii długiej

Wymiary poprzeczne linii spełniają warunek quasi-stacjonarności.



$2a < d$
$d << \lambda/4$
$d << l$
$\Delta z << \lambda/4$

Obwodowy schemat zastępczy odcinka linii długiej:

Parametry jednostkowe

Parametry jednostkowe
(parametry pierwotne, parametry rozproszone),
czyli przypadające na jednostkę długości:

$$R_0 = \frac{R}{\Delta z} \quad [\Omega/\mathrm{m}] \qquad L_0 = \frac{L}{\Delta z} \quad [\mathrm{H/m}]$$

$$G_0 = \frac{G}{\Delta z} \quad [\mathrm{S/m}] \qquad C_0 = \frac{C}{\Delta z} \quad [\mathrm{F/m}]$$

Parametry charakterystyczne (parametry falowe) linii długiej

Impedancja charakterystyczna:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad [\Omega] \qquad \mathrm{Re}(Z_0) > 0$$

Współczynnik propagacji (współcz. przenoszenia falowego):

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta \qquad [1/\mathrm{m}]$$

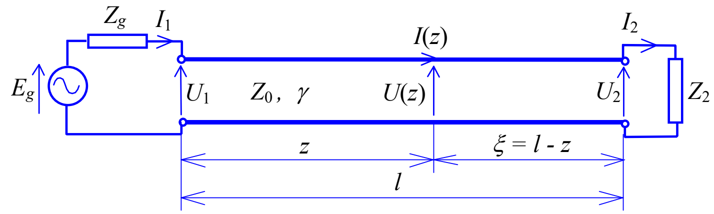
$\gamma(j\omega)$ - *współcz. propagacji (tamowność)* [1/m]

$\alpha(\omega)$ - *współcz. tłumienia* $\alpha \geq 0$ [Np/m]

$\beta(\omega)$ - *współcz. fazowy* $\beta > 0$ [rad/m]

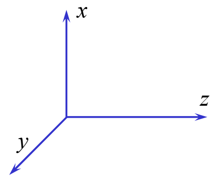
W technice antenowej współczynnik β oznacza się literą k i nazywa liczbą falową.

Fale napięcia i prądu



Rozwiązania równań falowych mają postać ogólną:

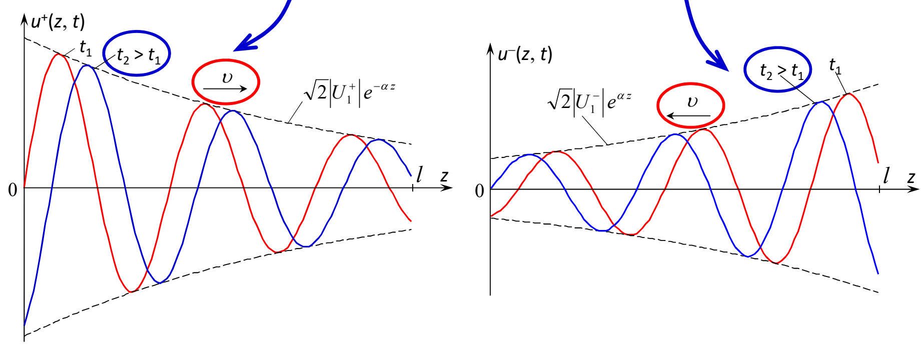
$$\begin{cases} U = U^{+} + U^{-} \\ I = I^{+} - I^{-} \end{cases}$$



Indeks „+" oznacza falę dążącą w kierunku dodatnim osi z
(inne nazwy: fala docelowa, fala padająca).
Indeks „–" oznacza falę dążącą w kierunku ujemnym osi z
(inne nazwy: fala powrotna, fala odbita od obciążenia)

Fala pierwotna i odbita (docelowa i powrotna)

$$u(z,t) = |U_1^{+}|\sqrt{2}\, e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \varphi_1) + |U_1^{-}|\sqrt{2}\, e^{\alpha z} \sin(\omega t + \beta z + \varphi_2)$$



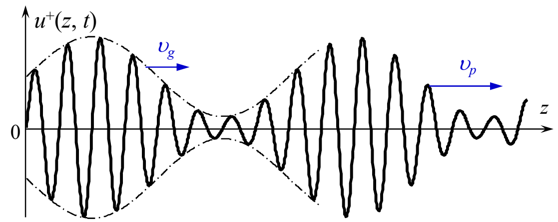
$$\beta = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Prędkość fazowa i prędkość grupowa

$$\boxed{\upsilon_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}}$$ prędkość fazowa *(phase velocity)*

$$\boxed{\upsilon_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}}}$$ prędkość grupowa *(group velocity)*

W telekomunikacji do przesyłania informacji stosowane są fale zmodulowane. Jeśli częstotliwość fali nośnej jest znacznie większa od częstotliwości sygnału modulującego, to prędkość grupową można interpretować jako prędkość obwiedni sygnału zmodulowanego, np. dla modulacji amplitudowej:



Efekt dyspersji

Zjawisko dyspersji – zależność prędkości propagacji (rozchodzenia się) fali od częstotliwości.

Wówczas: $\upsilon_p > \upsilon_g$ (prędkość fazowa jest większa od gupowej).

Jeżeli efekt dyspersji nie występuje, to sygnał o dowolnej częstotliwości rozchodzi się wzdłuż prowadnicy falowej z taką samą prędkością υ.

Wówczas: $\upsilon_p = \upsilon_g = \upsilon$ (prędkość fazowa jest równa grupowej).

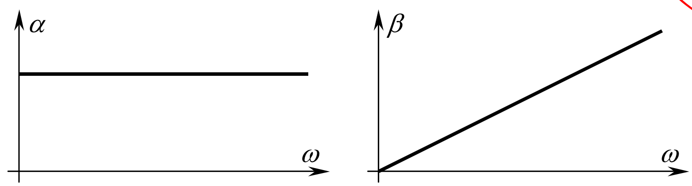
Linia niezniekształcająca

Jeśli współczynnik przenoszenia $\gamma = \alpha + j\beta$ spełnia warunki:

a) współcz. tłumienia nie zależy od częstotliwości: $\alpha \neq \alpha(\omega)$

b) współcz. fazowy jest liniową funkcją częstotliwości: $\beta \sim \omega$

$$\boxed{\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}}$$

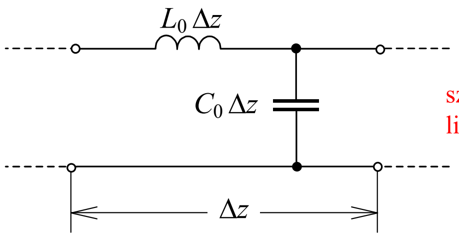


to linia nie wprowadza zniekształceń do sygnału transmitowanego przez tę linię: dowolny fragment widma sygnału jest jednakowo tłumiony ze współczynnikiem $\exp(-\alpha l)$ i ma przesunięcie fazowe $\theta = \beta l$ zależne liniowo od częstotliwości (sygnał o dowolnej częstotliwości potrzebuje takiego samego czasu $\tau = \upsilon_p l = \frac{\omega}{\beta} l$ do przejścia przez linię).

Inaczej: $\beta = \frac{\omega}{\upsilon_p}$; jeżeli $\upsilon_p = const.$, to $\beta \sim \omega$

Linia bezstratna

$$\boxed{R_0 = 0 \text{ i } G_0 = 0}$$



szczególny przypadek linii niezniekształcającej

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{(j\omega)^2 L_0 C_0} = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j\beta$$

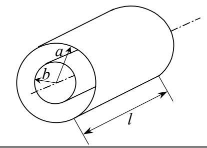
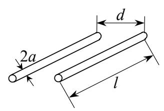
$$\alpha = 0$$

$$\boxed{\beta = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi f}{f \cdot \lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Dodatek: Parametry jednostkowe

Przykład 1

W przypadku linii o zaniedbywalnie małych stratach cieplnych: $R_0 \approx 0$ i $G_0 \approx 0$.

	linia koncentryczna (współosiowa) $L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{a}{b}$ [H/m] $C_0 = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{a}{b}}$ [F/m]
	symetryczna linia dwuprzewodowa $L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{d}{a}$ [H/m] $C_0 = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{d}{a}}$ [F/m]

Zwrócić uwagę na zależność parametrów elektrycznych od geometrii

Przykład 2

Obliczyć L_0 i C_0 kabla koncentrycznego o parametrach:
$2a = 3{,}5$ mm, $2b = 1{,}05$ mm, $\varepsilon_r = 2{,}1$

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{2a}{2b} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}}{2\pi}\ln\frac{3{,}5}{1{,}05} = 0{,}241\,[\mu\mathrm{H/m}]$$

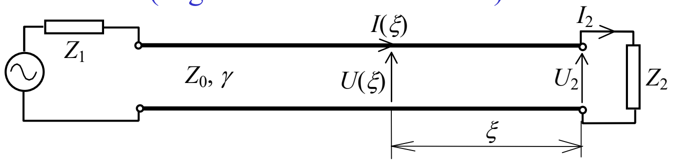
$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{2a}{2b}} = \frac{2\pi\frac{10^{-9}}{36\pi}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\cdot 2{,}1}{\ln\frac{3{,}5}{1{,}05}} = 96{,}9\,[\mathrm{pF/m}] \approx 100\,[\mathrm{pF/m}]$$

impedancja charakterystyczna kabla:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 49{,}87\,\Omega \cong 50\,\Omega$$

Współczynnik odbicia

(ang. Reflection Coefficient)



Współczynnik odbicia od obciążenia:

$$\Gamma_2 \underset{\text{def.}}{=} \frac{U_2^-}{U_2^+} = \frac{I_2^-}{I_2^+}$$

$$\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$$

Współczynnik odbicia można zdefiniować w dowolnej odległości ξ od zakończenia linii

$$\Gamma(\xi) = \frac{U^-(\xi)}{U^+(\xi)} = \frac{I^-(\xi)}{I^+(\xi)}$$

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\psi}$$

$$\boxed{0 \le |\Gamma| \le 1}$$

Przypadki szczególne: zwarcie i rozwarcie na końcu, dopasowanie falowe

$$\boxed{\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}}$$

a) Zwarcie na końcu linii

$\underline{Z_2 = 0}$ – wówczas $\Gamma_2 = \dfrac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1$ – całkowite odbicie fali od obciążenia

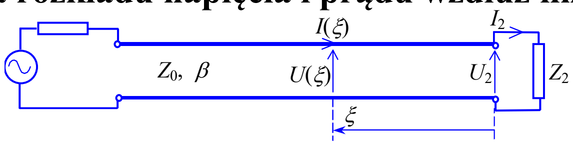
b) Rozwarcie na końcu linii

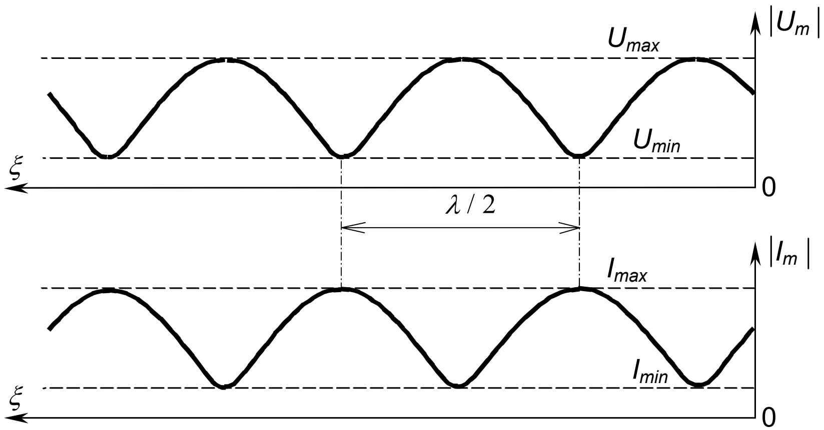
$\underline{Z_2 \to \infty}$ – wówczas $\Gamma_2 = \dfrac{\infty - Z_0}{\infty + Z_0} = \dfrac{1 - \frac{Z_0}{\infty}}{1 + \frac{Z_0}{\infty}} = 1$ – całkowite odbicie

c) <u>DOPASOWANIE</u>

$\underline{Z_2 = Z_0}$ – wówczas $\Gamma_2 = \dfrac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = 0 = \dfrac{U_2^-}{U_2^+} = \dfrac{I_2^-}{I_2^+}$ – <u>brak fali odbitej</u>: $\begin{cases} U_2^- = 0 \\ I_2^- = 0 \end{cases}$

Obwiednia rozkładu napięcia i prądu wzdłuż linii bez strat





Współczynnik fali stojącej (WFS)

(ang. SWR – Standing Wave Ratio)

Dla linii bez strat:

$$\boxed{WFS = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_2|}{1 - |\Gamma_2|}}$$

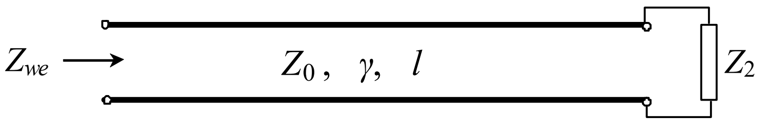
Zakres zmian wartości współczynnika fali stojącej: $\underline{\mathbf{1 \le WFS < \infty}}$

Najczęściej stosowane kryterium dopasowania impedancji: **WFS ≤ 2** (czyli $|\Gamma| \le 1/3$)

Używany jest też współczynnik fali bieżącej (w technice antenowej):

$$WFB = \frac{1}{WFS}$$

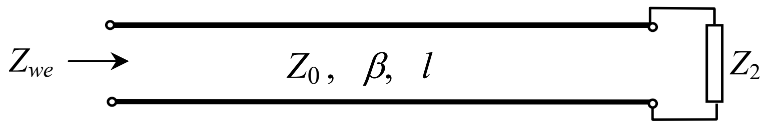
Impedancja wejściowa linii (wzór ogólny)



$$\boxed{Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \mathrm{tgh}\,\gamma l}{Z_0 + Z_2 \mathrm{tgh}\,\gamma l}}$$

Impedancja wejściowa może znacząco różnić się od impedancji obciążenia (różnice między Z_{we} i Z_2 mogą być dowolnie duże).

Impedancja wejściowa linii bez strat



$$Z_{we} = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \mathrm{tgh}\,\gamma l}{Z_0 + Z_2 \mathrm{tgh}\,\gamma l}$$

$$\gamma = j\beta$$

$$\mathrm{tgh}\,\gamma l = \mathrm{tgh}\, j\beta l = j\mathrm{tg}\,\beta l$$

$$\boxed{Z_{we} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \mathrm{tg}\,\beta l}{Z_0 + jZ_2 \mathrm{tg}\,\beta l}}$$

Linia bezstratna jako transformator impedancji

$$\boxed{Z_{we} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \mathrm{tg}\beta l}{Z_0 + jZ_2 \mathrm{tg}\beta l}}$$

*1) **Linia półfalowa:*** $l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \mathrm{tg}\,\beta l = 0$

$$\boxed{Z_{we} = Z_2}$$

Mówi się, że bezstratna linia półfalowa jest „przezroczysta".

*2) **Linia ćwierćfalowa:*** $l = \frac{\lambda}{4} + n \cdot \frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow \mathrm{tg}\,\beta l \to \infty$

$$\boxed{Z_{we} = \frac{Z_0^2}{Z_2}}$$

*3) **Linia dopasowana*** (nie musi być bezstratna): $Z_2 = Z_0$.

$$\boxed{Z_{we} = Z_0}$$

Linia bezstratna jako transformator impedancji

$$\boxed{Z_{we} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \mathrm{tg}\beta l}{Z_0 + jZ_2 \mathrm{tg}\beta l}}$$

*4) **Linia zwarta na końcu*** $\boxed{Z_2 = 0}$

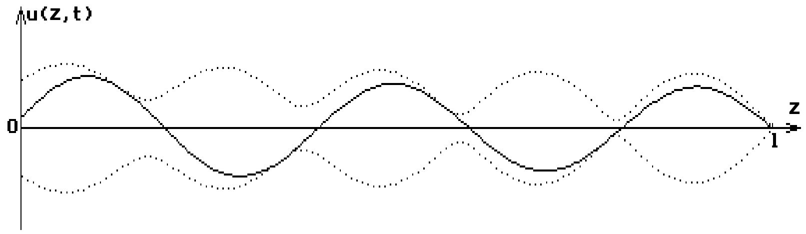
$$Z_{we} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \mathrm{tg}\beta l}{Z_0 + jZ_2 \mathrm{tg}\beta l} = Z_0 \frac{0 + jZ_0 \mathrm{tg}\beta l}{Z_0 + 0} = jZ_0 \mathrm{tg}\beta l$$

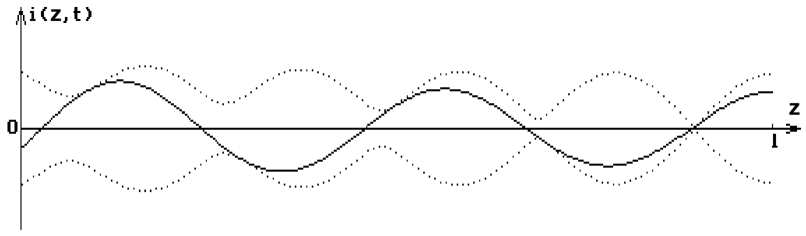
*5) **Linia rozwarta na końcu*** $\boxed{Z_2 = \infty}$

$$Z_{we} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \mathrm{tg}\beta l}{Z_0 + jZ_2 \mathrm{tg}\beta l} = Z_0 \frac{1 + j\frac{Z_0}{Z_2} \mathrm{tg}\beta l}{\frac{Z_0}{Z_2} + j\mathrm{tg}\beta l} \xrightarrow[Z_2 \to \infty]{} -jZ_0 \mathrm{ctg}\beta l$$

Rozkład napięcia i prądu wzdłuż linii ze stratami

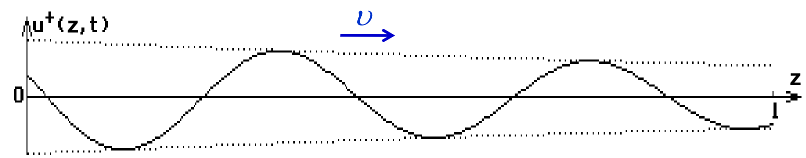
Przykład: linia ze stratami zwarta na końcu

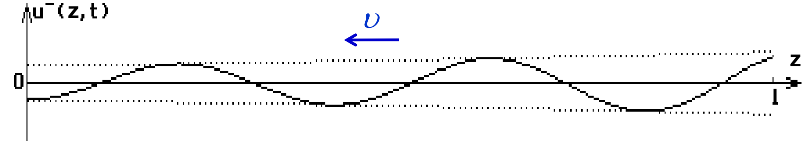


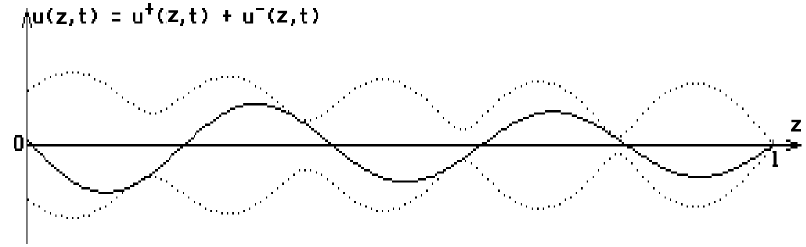


Rozkład napięcia wzdłuż linii ze stratami

Przykład: linia ze stratami zwarta na końcu







Długość elektryczna

Argument tangensa, czyli przesunięcie fazowe

$\beta l = \theta$ [rad]

to tzw. *długość elektryczna*

$\boxed{\upsilon_p = \frac{\omega}{\beta}}$

$$\beta = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\boxed{\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = 2\pi \frac{l}{\lambda}}$$

Podsumowanie

1. Linia długa (transmisyjna) jest urządzeniem o parametrach rozłożonych wzdłuż trasy propagacji sygnału. Są to parametry jednostkowe: R_0, L_0, G_0, C_0.

2. Podstawowe właściwości użytkowe linii są opisywane za pomocą jej parametrów charakterystycznych:
– impedancja charakterystyczna Z_0,
– współczynnik propagacji $\gamma = \alpha + j\beta$.

3. Najbardziej istotne efekty działania linii:
– opóźnienie sygnału w dziedzinie czasu $\tau = l/\upsilon$;
– przesunięcie fazy sygnału w dziedzinie częstotliwości $\theta = \beta l = \omega l/\upsilon = \omega\tau$;
– transformacja impedancji obciążenia na impedancję wejściową; impedancje te mogą różnić się znacznie (obecność funkcji tangens we wzorze na Z_{we});
– tłumienie sygnału αl.

4. Najbardziej pożądanym stanem pracy jest dopasowanie impedancji (WFS ≤ 2).

Funkcja homograficzna odwzorowująca $z \leftrightarrow \Gamma$

$$\boxed{\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{\dfrac{Z}{Z_0} - 1}{\dfrac{Z}{Z_0} + 1} = \frac{z-1}{z+1}} \qquad \boxed{z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}}$$

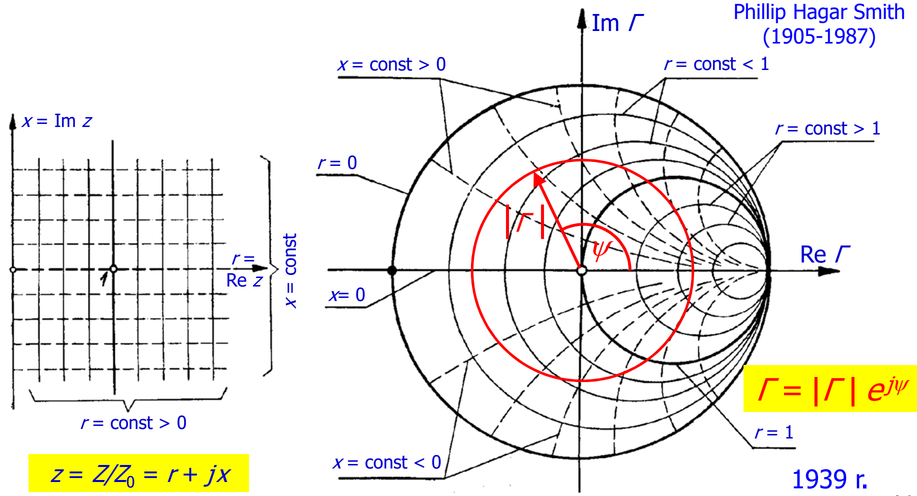
- Odwzorowanie homograficzne przyporządkowuje wzajemnie jednoznacznie punkty na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Γ i z.
- Okrąg na jednej z tych płaszczyzn transformuje się na okrąg na drugiej (linia prosta jest szczególnym przypadkiem okręgu przy promieniu $\to \infty$).
- Zachowana jest ortogonalność okręgów.

Jeśli transformację ograniczyć do prawej półpłaszczyzny zmiennej z $(r \geq 0)$, to otrzymuje się wykres Smitha.
Odwzorowaniem prawej półpłaszczyzny zmiennej z jest wnętrze okręgu $|\Gamma| = 1$, a lewej – zewnętrze tego okręgu (używane przy analizie układów aktywnych).

Wykres Smitha

$z \leftrightarrow \Gamma$

Phillip Hagar Smith
(1905-1987)



1939 r.

Wykres Smitha

Powszechnie stosowane kryterium dopasowania:
miejsce geometryczne unormowanej impedancji powinno znajdować się wewnątrz okręgu odpowiadającego WFS = 2:

$$|\Gamma| = \frac{\text{WFS}-1}{\text{WFS}+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$