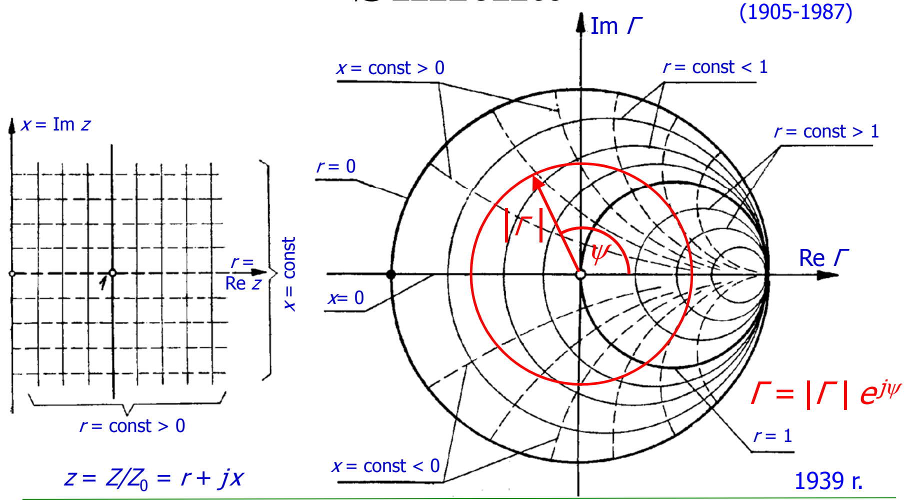
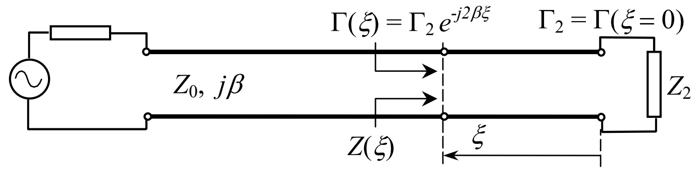
Wykres Smitha

Phillip Hagar Smith
(1905-1987)



Normowanie immitancji (impedancji i admitancji)



$$\Gamma(\xi)=\frac{Z(\xi)-Z_0}{Z(\xi)+Z_0} \qquad Z(\xi)=Z_0\frac{1+\Gamma(\xi)}{1-\Gamma(\xi)}$$

Wprowadźmy pojęcie unormowanej impedancji i unormowanej admitancji:

$$\boxed{z(\xi)=\frac{Z(\xi)}{Z_0}} \qquad \boxed{y(\xi)=\frac{Y(\xi)}{Y_0}}$$

Dla tak wprowadzonych pojęć słuszne są związki:

$$\Gamma(\xi)=\frac{z(\xi)-1}{z(\xi)+1}=\frac{1-y(\xi)}{1+y(\xi)} \qquad z(\xi)=\frac{1+\Gamma(\xi)}{1-\Gamma(\xi)}$$

$$y(\xi)=\frac{1-\Gamma(\xi)}{1+\Gamma(\xi)}$$

Funkcja homograficzna

$$\Gamma=\frac{z-1}{z+1} \qquad z=\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

Są to szczególne postacie _funkcji homograficznej_, wiążącej dwie zmienne zespolone Γ i z:

$$\Gamma=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}$$

gdzie: *a, b, c, d* – stałe zespolone.

Właściwości funkcji homograficznej

$$\boxed{\Gamma=\frac{a\,z+b}{c\,z+d}}$$

- Odwzorowanie homograficzne przyporządkowuje wzajemnie jednoznacznie punkty na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Γ i z.
- Okrąg na jednej z tych płaszczyzn transformuje się na okrąg na drugiej (prosta jest szczególnym przypadkiem okręgu przy promieniu $\to \infty$).
- Zachowana jest ortogonalność okręgów.

Odwzorowanie $z \rightarrow \Gamma$

Oznaczmy:

$$\Gamma(\xi) = \Gamma_2 e^{-j2\beta\xi} = u + jv$$

Wówczas impedancja unormowana $z = z(\xi)$:

$$z = r + jx = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{1+(u+jv)}{1-(u+jv)}$$

Wyznaczając część rzeczywistą x i urojoną y impedancji z otrzymuje się:

$$\boxed{r = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}} \qquad \boxed{x = \frac{2v}{(1-u)^2+v^2}}$$

Odwzorowanie $z \rightarrow \Gamma$

Po przekształceniach:

$$\boxed{\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2} \qquad \boxed{(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

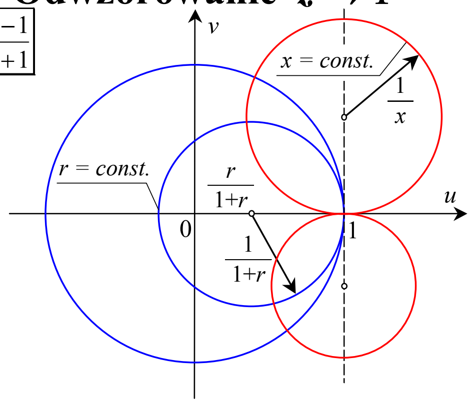
Dla $r = const.$ lewe równanie opisuje okrąg o środku w punkcie $(r/(1 + r), 0)$ i o promieniu równym $1/|1 + r|$.

Podobnie, dla $x = const.$ prawe równanie opisuje okrąg o środku w punkcie $(1, 1/x)$ i o promieniu $1/|x|$.

Odwzorowanie $z \rightarrow \Gamma$

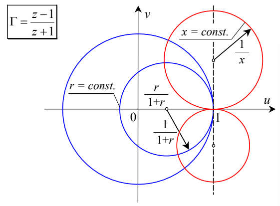
$$\boxed{\Gamma = \frac{z-1}{z+1}}$$

Dwie rodziny okręgów:

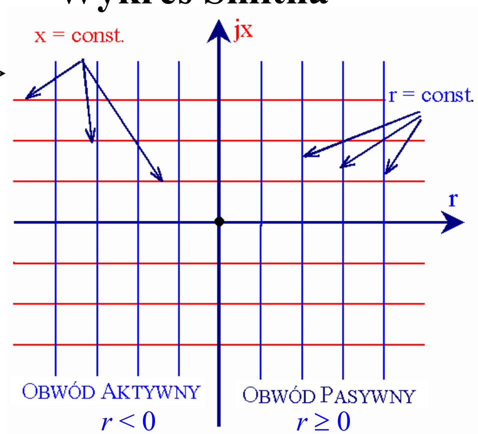


Wykres Smitha powstaje przez odwzorowanie homograficzne siatki prostych *r = const.* i *x = const.* z płaszczyzny unormowanej impedancji *z* na płaszczyznę współczynnika odbicia Γ:

$$\Gamma = u + jv = \frac{z-1}{z+1} = \frac{r+jx-1}{r+jx+1}$$

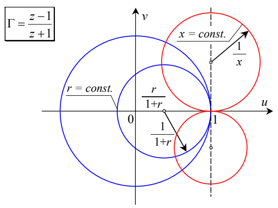


Wykres Smitha

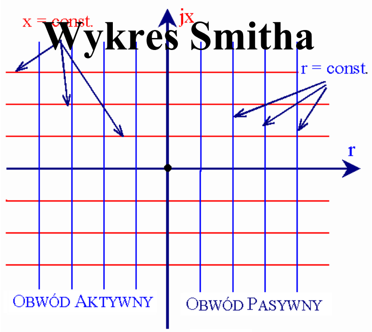


płaszczyzna zmiennej z

Jeśli transformację ograniczyć do prawej półpłaszczyzny ($r \geq 0$), to otrzymuje się wykres Smitha.
Odwzorowaniem prawej półpłaszczyzny zmiennej z jest wnętrze okręgu $|\Gamma| = 1$, a lewej – zewnętrze tego okręgu (używane przy analizie układów aktywnych).



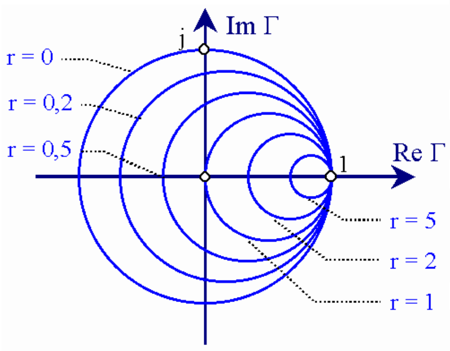
Wykres Smitha

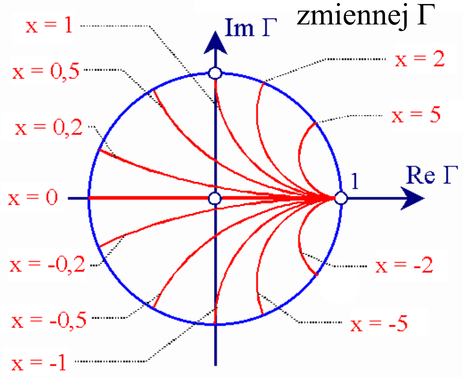


płaszczyzna zmiennej z

$r \geq 0$

płaszczyzna zmiennej Γ





$z \rightarrow \Gamma$

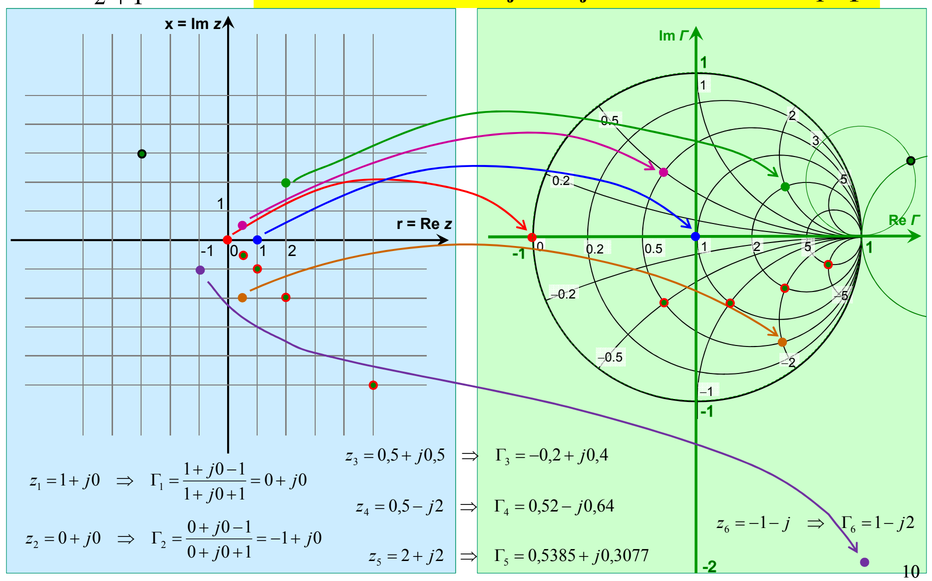
$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$$

Wykres Smitha

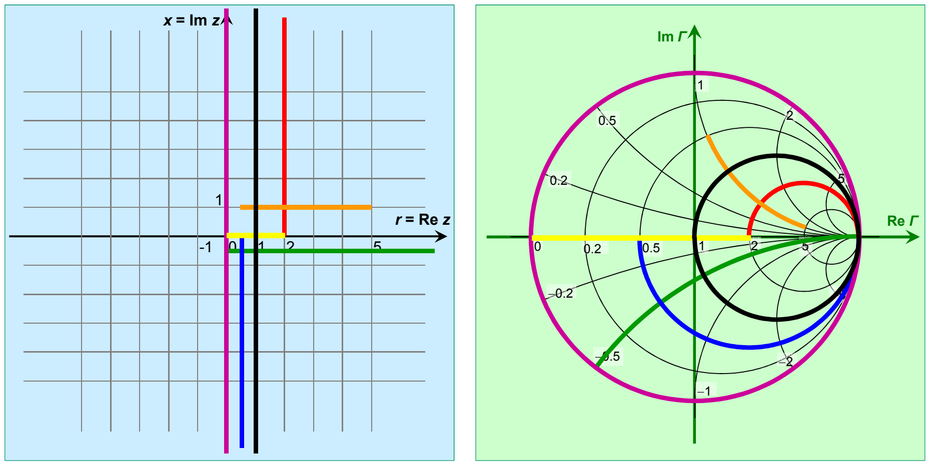
Jest to odwzorowanie **wzajemnie jednoznaczne**:

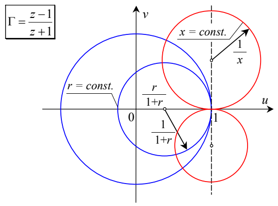
$z \leftarrow \Gamma$

$$z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$



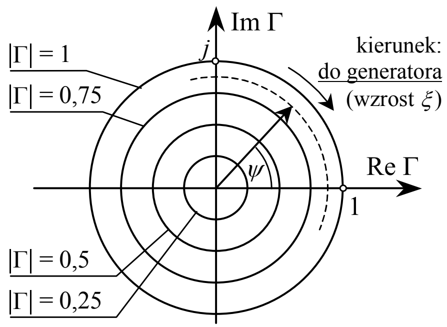
Wykres Smitha





Wykres Smitha

Trzecią rodziną okręgów wchodzących w skład wykresu są okręgi współśrodkowe (o środku w punkcie Re Γ = Im Γ = 0), które są miejscami geometrycznymi stałych wartości modułu współczynnika odbicia Γ.



Okręgi stałych wartości |Γ| (stałych wartości WFS) są wykreślane cyrklem podczas obliczeń z wykorzystaniem wykresu Smitha.