

Instrukcja do zajęć laboratoryjnych

Temat ćwiczenia: **Cyfrowe metody tłumienia szumów i zakłóceń.**

Numer ćwiczenia: 4

Laboratorium z przedmiotu:

ELEKTRONICZNA APARATURA POMIAROWA

KOD:

Opracował: dr inż. Wojciech Kowalski

# 1. Wybrane algorytmy pomiarowe

## 1.1. Uśrednianie sygnałów.

Metody uśredniania są powszechnie używane w wielu algorytmach. Ich własności wykorzystuje się przy zwiększaniu dokładności pomiarów, w algorytmach detekcji sygnałów, czy też w filtrach dolnoprzepustowych.

### 1.1.1. Metoda uśredniania koherentnego

Aby zrealizować algorytm uśredniania koherentnego badany sygnał musi charakteryzować się powtarzalnością, synchronizacją wykorzystanego przy próbkowaniu sygnału pierwotnego; oznacza to, że gromadzimy wielokrotne zbiory próbek sygnału źródłowego zakłóconego szumem addytywnym i wymagamy aby faza sygnału była identyczna w każdym zbiorze. Gromadząc  $N$  zbiorów po  $m$  próbek zaszumianego impulsu w postaci:

$$\text{zbiór}_1 \text{ próbek} = \{x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(m),\}$$

$$\text{zbiór}_2 \text{ próbek} = \{x_2(1), x_2(2), \dots, x_2(m),\}$$

...

...

$$\text{zbiór}_N \text{ próbek} = \{x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(m),\}$$

Wymaga się aby czasy pomiaru były zsynchronizowane z początkiem tego impulsu. W celu koherentnego uśrednienia  $N$  zbiorów korzystamy ze wzoru:

$$x_{\text{ave}}(i) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(i)$$

Uśredniając  $N$  próbek otrzyma się  $m$  elementowy ciąg  $x_{\text{ave}}(i)$ , wzrost liczby uśrednianych próbek  $N$  powoduje większą redukcję szumu nałożonego na impuls jednocześnie zachowując przebieg impulsu.

Rozważanie nad aspektami filtracyjnymi uśredniania koherentnego dąży do znalezienia zależności sygnału do szumu w funkcji  $N$ , liczby uśrednionych próbek. Biorąc przykładowo stały w czasie sygnał o amplitudzie  $A$ , w wyniku pomiarów którego otrzymujemy różne wartości  $A$ , zakładamy że jest on zniekształcony szumem, także wyniki  $n$ -tego pomiaru można zapisać

$$r(n) = A + \text{noise}(n)$$

gdzie  $\text{noise}(n)$  jest określeniem składnika szumu. Wyznaczenie wartości  $A$  posiadając do dyspozycji jedynie ciąg  $r(n)$  otrzymanych w pomiarze wyników sprowadza się do uśrednienia próbek uzyskanych z  $N$  pomiarów i otrzymaniu jednej wartości średniej  $r_{\text{ave}}$ , przy czym

$r_{ave}(k)$  nie jest stałe dla tej samej liczby uśrednionych próbek i posiada pewną fluktuację, kolejne uśrednienia próbki można zapisać

$$r_{ave}(1) = [r(1) + r(2) + r(3) + \dots + r(N)]/N$$

$$r_{ave}(1) = [r(N+1) + r(N+2) + r(N+3) + \dots + r(2N)]/N$$

$$r_{ave}(1) = [r(2N+1) + r(2N+2) + r(2N+3) + \dots + r(3N)]/N$$

...

...

$$r_{ave}(k) = [r((k-1)N+1) + r((k-1)N+2) + r((k-1)N+3) + \dots + r(kN)]/N$$

co w postaci ogólnej można zapisać:

$$r_{ave}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r([k-1] \cdot N + n)$$

Porównując odchylenie standardowe ciągu uśrednień  $r_{ave}(k)$  z odchyleniem standardowym ciągu podstawowego  $r(n)$  można zaobserwować jak uśrednienie wpływa na niepewność pomiaru. Udowodniono, że jeśli odchylenie standardowe otrzymane dla ciągu podstawowego  $r(n)$  wynosi  $\sigma_{in}$  to odchyleniem standardowym  $\sigma_{ave}$  ciągu uśrednionego  $r_{ave}(k)$  zapisuje się jako:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_{in}}{\sqrt{N}}$$

Jak widać z powyższego równania zwiększenie  $N$  pozwala na redukcję szumów, uśredniona wartość  $r_{ave}(k)$  zbliża się do oczekiwanej wartości  $A$  w porównaniu do wartości pierwotnej pomiaru  $r(n)$  w którym oscylacje są znaczące.

Redukcja szumu otrzymana przez uśrednienie można opisać w inny sposób. Ponieważ  $\sigma_m$  opisuje odchylenie standardowe szumu dodanego do sygnału o amplitudzie  $A$ , więc zależność sygnału pierwotnego do szumu można zapisać:

$$SNR_m = \frac{A}{\sigma_m}$$

Analogicznie zależność uśrednionego sygnału do szumu  $SNR_{ave}$  można zapisać :

$$SNR_{ave} = \frac{r_{ave}}{\sigma_{ave}} = \frac{A}{\sigma_{ave}}$$

Zysk sygnały do szumu  $SNR_{koh}$  otrzymany w wyniku uśredniania koherentnego jest równy:

$$SNR_{koh} = \frac{SNR_{ave}}{SNR_{in}} = \frac{A/\sigma_{ave}}{a/\sigma_w} = \frac{\sigma_w}{\sigma_{ave}}$$

co po podstawieniu  $\sigma_{ave}$  daje:

$$SNR_{koh} = \frac{\sigma_w}{\sigma_w/\sqrt{N}} = \sqrt{N}$$

gdź stosunek sygnału do szumu chcemy obserwować w decybelach [6]:

$$SNR_{koh} (dB) = 20 \log_{10}(SNR_{koh}) = 20 \log_{10}(\sqrt{N}) = 10 \log_{10}(N)$$

Podsumowując uśrednianie koherentne redukuje wariancję (odchylenie standardowe) szumu, zachowując jednocześnie wartości chwilowe sygnału, które są synchronizowane lub koherentne z początkiem przedziału próbkowania. Poprzez uśrednianie możemy więc polepszyć stosunek sygnału do szumu proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego z liczby uśrednianych próbek sygnału.

Poniżej przedstawiono skrypt prezentujący realizację algorytmu uśredniania koherentnego.

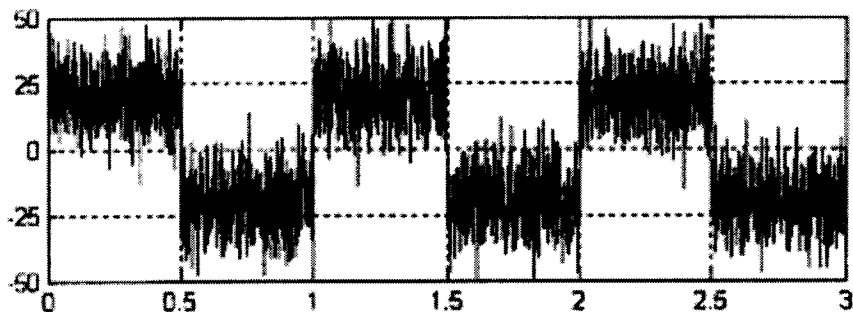
%Skrypt 1. Uśrednianie koherentne.

```
%-----  
clear all; subplot(1 1 1);clf;  
okno=3;  
fs=1000;  
dt=1/fs;  
t=0:dt:okno;  
m=length(t);  
x=20*sqrt(2*pi)*t;  
n=2;  
y = zeros(n,m);  
for i = 1:n  
    x2=x+10*randn(1,m)  
    for j = 1:m  
        y(i,j) = x2(j);  
    end  
end  
subplot(2,1,1);  
plot(t,x2,'r');grid;xlabel('t');ylabel('x2(t)');title('sygnał filtrowany');  
set(gca,'YTick',-50:25:50)  
ylim([-50 50])  
set(gca,'YTickLabel',{'-50','-25','0','25','50'})  
z = zeros(1,m);
```

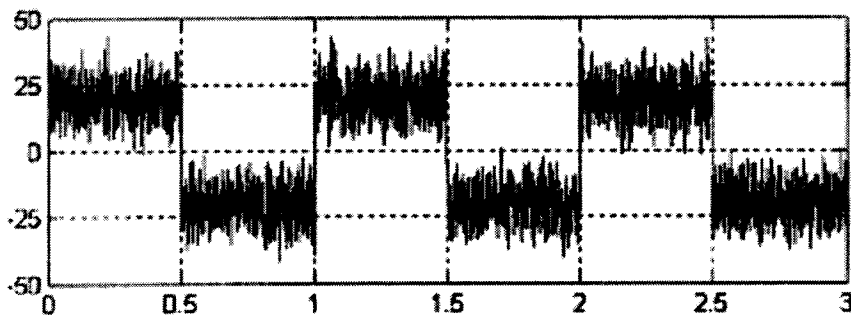
```

for j = 1:m
    for i = 1:n
        z(j) = y(i,j)+z(j);
    end
end
z=z/n;
subplot(2,1,2);
plot(t,z,'r');grid;xlabel('t');ylabel('y(t)');title('sygnał po filtracji');
set(gca,'YTick',-50:25:50)
ylim([-50 50])
set(gca,'YTickLabel',{'-50','-25','0','25','50'})
%
```

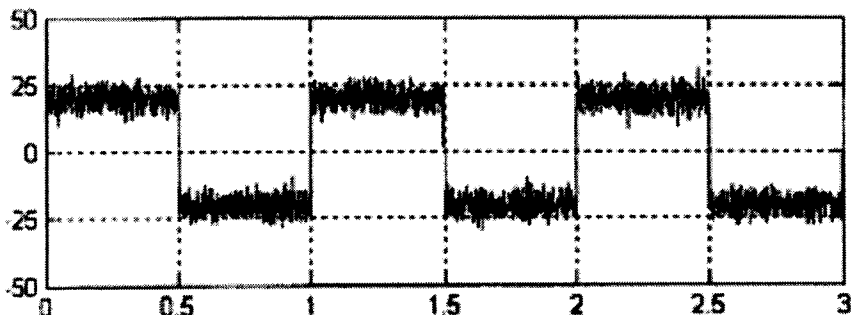
Poniżej przedstawiono przebiegi sygnału poddanego uśrednianiu koherentnemu



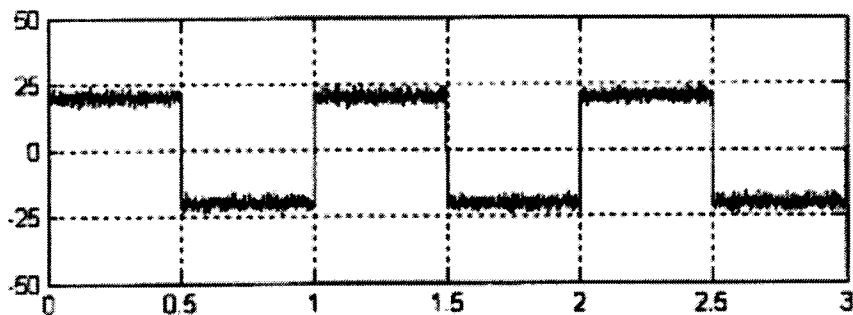
Rys. 1. Sygnał plus szum, liczna uśrednień N=1.



Rys. 2. Sygnał plus szum, liczna uśrednień N=2.



Rys. 3. Sygnał plus szum, liczna uśrednień N=10.



Rys. 4. Sygnał plus szum, liczna uśrednień  $N=50$ .

### 1.1.2 Metoda uśredniania niekoherentnego

Sygnał uśredniany z wykorzystaniem algorytmu uśredniania niekoherentnego nie musi spełniać wymagań odnośnie synchronizacji czasowej próbek; czyli przedziały czasu pomiaru sygnału nie muszą być w żaden sposób zsynchronizowane z fazą sygnału mierzonego. Z powyższych powodów wynika, że uśrednianie niekoherentne nie jest użyteczne w dziedzinie czasu gdyż uśrednienie wielu takich zbiorów próbek nie spełniałoby wymogów filtracyjnych a wręcz rozmazałoby odzyskiwany sygnał. Uśrednianie niekoherentne w dziedzinie częstotliwości, może zapewnić zwiększoną dokładność pomiaru względnych mocy sygnału. Nie poprawia ono co prawda stosunku sygnału do szumu ale poprawia pomiary mocy sygnałów w obecności szumu, redukuje fluktuacje mocy. Aby zastosować uśrednianie niekoherentne z dziedziny czasu stosując dyskretną transformatę Fouriera przechodzimy do dziedziny częstotliwości i realizujemy uśrednianie otrzymanego sygnału. Na rys. 5 widzimy wartości mocy wyjściowej pojedynczego FFT tonu podstawowego i dwóch składowych harmonicznych zanurzonego w szumie tła. Na rys. 5 widać, że poziom mocy szumu oscyluje względem zaznaczonej na rysunku linii o wartości  $-18\text{dB}$ .

Realizację 20 procedur FFT, uśrednienie i unormowanie otrzymanych mocy przedstawia widmo na rys. 6. Widać na nim, że wariancja szumu w widmie mocy została zmniejszona ale średni poziom mocy szumu pozostał nie zmieniony i wynosi nadal  $18\text{dB}$ .

Widmo na rys. 7 pokazuje wynik uśrednienia 200 widm mocy sygnału, widać na nim jeszcze większe zmniejszenie wariancji szumu w widmie, więc i polepszenie względnej miary poziomów mocy składowych harmonicznych.

Programowo przykładowy algorytm uśredniania niekoherentnego zwiększający dokładność pomiaru względnych mocy sygnału może mieć postać:

%Skrypt 2. Uśrednianie niekoherentne.

```

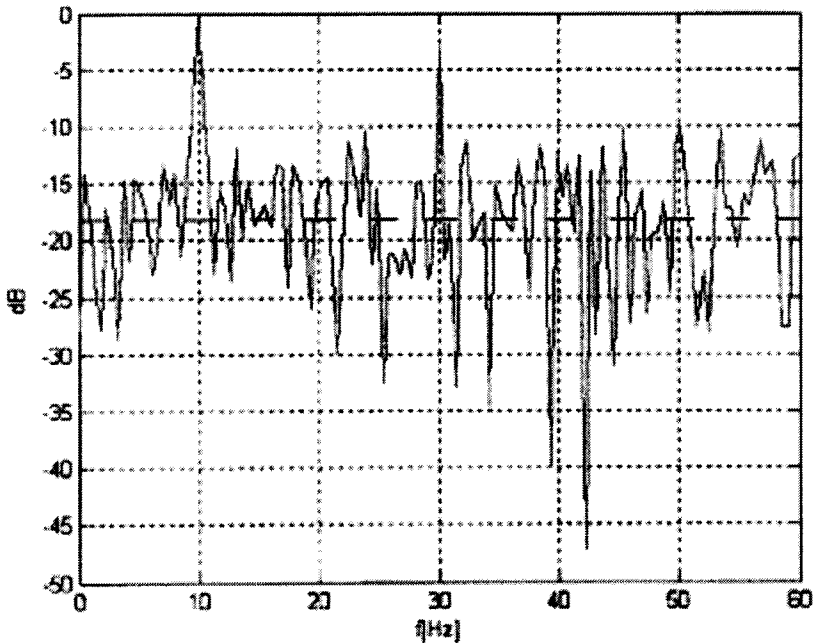
%-----
clf;
z=1; A=12;fp=120; N=256;
k=1/fp;
b=k*(N-1);
t=0:k:b;
y=0.2*sin(2*pi*50*t)+0.5*sin(2*pi*30*t)+sin(2*pi*10*t);
n=200;

```

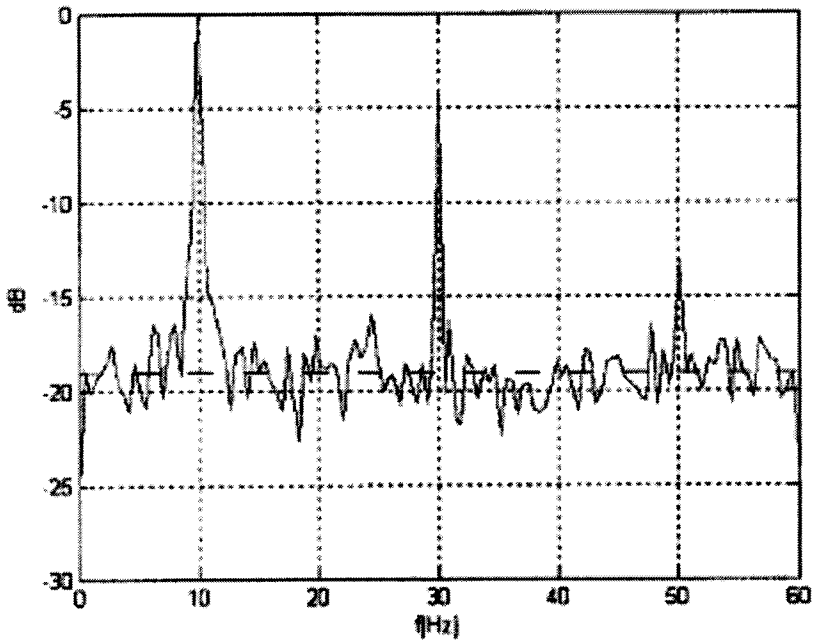
```

ys = zeros(n,length(t));
for i = 1:n
    yn=A*y+A*randn(1,length(t));
    Y=abs(fft(yn));
    db=20*log10(Y/Y(1));
    a=max(db);
    db1=db-a;
    for j = 1:length(t)
        ys(i,j) = db1(j);
    end
end
z = zeros(1,length(t));
for j = 1:length(t)
    for i = 1:n
        z(j) = ys(i,j)+z(j);
    end
end
z=z/n;
srd=mean(z)
m=1:length(t);
m1=m-1;
f=m1 * fp/N;
plot(f(1:length(t)/2+1),z(1:length(t)/2+1),'r');grid;xlabel('f[Hz]');ylabel('dB');
%
```

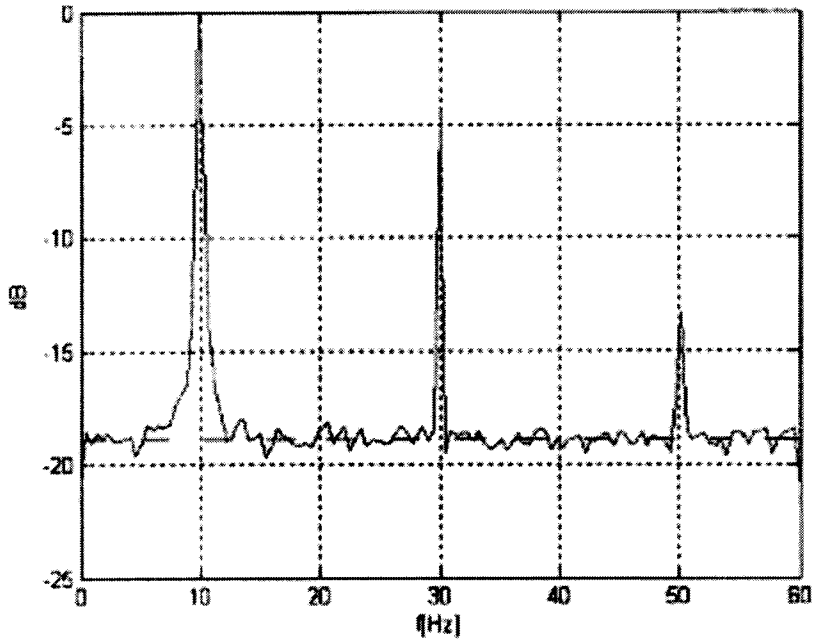
Poniżej przedstawiono przebiegi uśrednionych mocy wyjściowych FFT



Rys. 5 Widmo mocy sygnału, liczba uśrednień  $N=1$ .



Rys. 6 Widmo mocy sygnału, liczna uśrednień  $N=20$ .



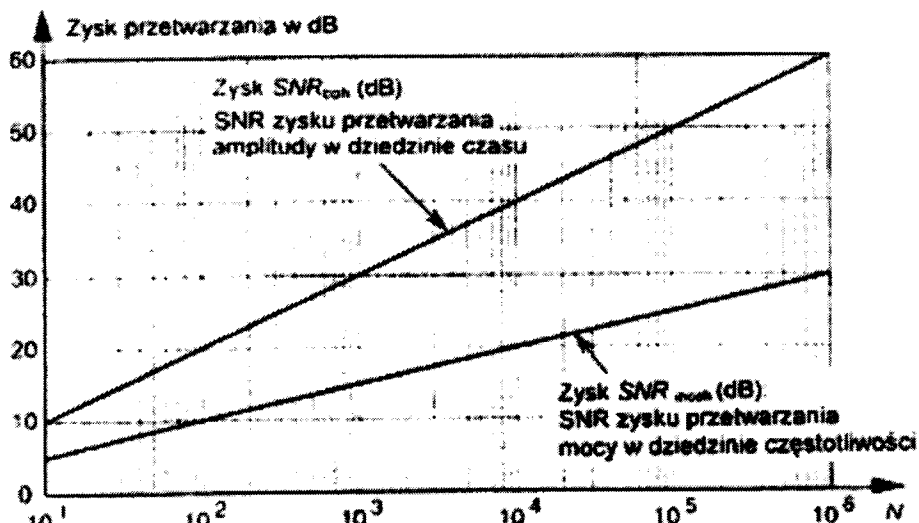
Rys. 7 Widmo mocy sygnału, liczna uśrednień  $N=200$ .



Zysk  $SNR_{\text{niekoh}}$  uśrednianie niekoherentnego mierzony w dB wyraża się podobnie jak SNR dla uśrednianie koherentnego wzorem[6]:

$$SNR_{\text{niekoh}}(dB) = 10 \log_{10}(\sqrt{N})$$

Wzór ten ma jest stosowany tylko wówczas gdy wielkością mierzoną jest moc sygnału, dlatego w równaniu jest użyty współczynnik 10 w przeciwieństwie dla współczynnika 20 użytego we wzorze na SNR dla uśredniania koherentnego. Porównanie zysku otrzymanego dla uśredniania koherentnego i niekoherentnego przedstawia rysunek 8



Rys. 8 Porównanie SNR zysku przetwarzania amplitudy w dziedzinie czasu i SNR zysku przetwarzania w dziedzinie częstotliwości.

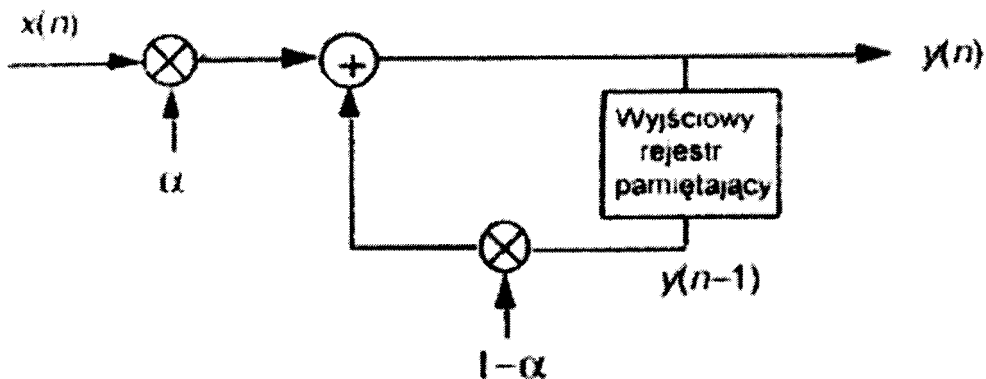
### 1.1.3 Metoda uśredniania wykładniczego.

Uśrednianie wykładnicze jest przykładem uśredniania w dziedzinie czasu, używane jest między innymi w części sprzętu do pomiarów mocy. Redukcję szumu w tej metodzie realizuje się poprzez wymnożenie próbki wejściowej z odpowiednią wagą i dodanie tego wyniku do uzupełnienia tej wagi do jedynki, pomnożonego przez poprzednią wartość wyjściową systemu uśredniającego. Uśredniania wykładnicze realizuje wzór:

$$y(i) = \alpha x(i) + (1 - \alpha)y(i - 1)$$

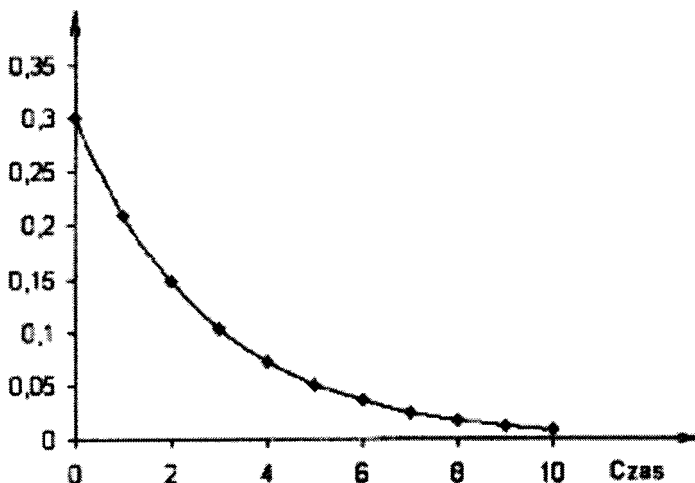
gdzie  $y(i)$  jest próbka wyjściową systemu uśredniającego,  $y(i - 1)$  jest poprzednią próbka wyjściową systemu uśredniającego,  $\alpha$  jest stałą, stanowiącą współczynnik wagowy.

Sposób realizacji równania prezentuje rys .9



Rys. 9 Wykładniczy system uśredniający

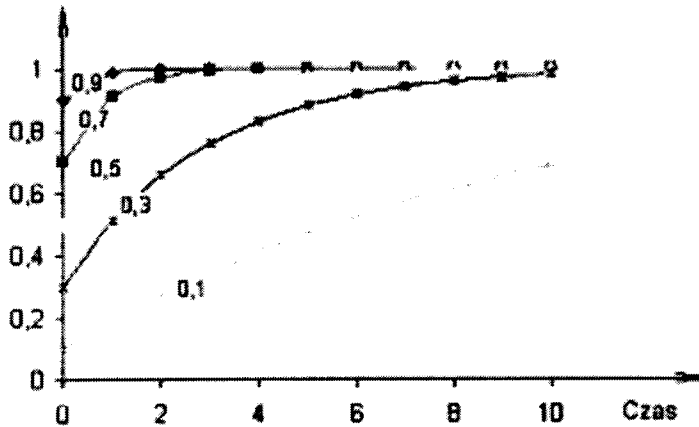
Nazwa uśrednianie wykładnicze jest spowodowana faktem, że odpowiedź na skok impulsowy w dziedzinie czasu ma charakter wykładniczy. Przykładowo zakładając, że sygnał wejściowy  $x(n)$  układu przedstawionego na rysunku stanowi ciąg zer, a w chwili  $t=0$  podajemy jedną próbkę o wartości 1 kolejne stanowią zera. Podstawiając współczynnik wagowy  $\alpha=0,3$  to uzyskany sygnał wyjściowy w o przebiegu pokazanym na rys. 10. W chwili  $t=0$  wartość wejściowa jest mnożona przez współczynnik  $\alpha$  co zmniejsza sygnał  $y(n)$  do wartości 0,3. W kolejnym kroku wartość sygnału wejściowego  $x(n)$  jest równa zeru zaś otrzymaną poprzednio wartość 0,3 wyznaczamy przez  $(1-0,3)$  co daje sygnał wyjściowy równy 0,21. Dla następnej chwili otrzymaną wartość 0,21 mnożymy znów przez  $(1-0,3)$  i otrzymujemy 0,15. Powtarzając powyższe czynności dla sygnału wyjściowego  $y(n)$  wykładniczego systemu uśredniającego otrzymujemy odpowiedź impulsową dla współczynnika wagowego  $\alpha=0,3$ .



Rys. 10 Odpowiedź impulsowa wykładniczego systemu uśredniającego dla  $\alpha=0,3$

Ważnym parametrem stosowanym dla uśredniania wykładniczego jest jego możliwość regulacji zmniejszenia szumu poprzez zmianę wartości współczynnika  $\alpha$ . Dla  $\alpha$  równego

jedności nie następuje uśrednianie gdyż system uśredniający ignoruje wartości wyjściowe. Zmniejszanie współczynnika wagowego  $\alpha$  powoduje zwiększenie tłumienia sygnału wejściowego a przeszła wartość wyjściowa systemu uśredniającego zaczyna wpływać na bieżącą wartość sygnału wyjściowego. Próbkki wyjściowe są ważoną wykładniczo sumą poprzednich wartości sygnału wejściowego, uśrednianie to charakteryzuje się zmniejszaniem szumu w sygnale. Zmniejszanie wartości wagowej  $\alpha$  powoduje zmniejszenie redukcji szumów, ale zmniejsza także szybkość odpowiedzi na zmiany w sygnale wejściowym. Na rys .11 przedstawiono jak różne wartości współczynnika  $\alpha$  wpływają na odpowiedź systemu uśredniającego wykładniczo w przypadku skoku jednostkowego w dziedzinie czasu.



Rys. 11 Odpowiedź systemu uśredniającego wykładniczo w przypadku skoku jednostkowego w zależności od współczynnika  $\alpha$

Stosowanie uśredniania wykładniczego zmusza do wyboru czy chcemy aby nasz układ charakteryzował się większą redukcją szumów kosztem wolniejszej reakcji na zmiany w sygnale wejściowym, lub będzie reagował szybko ale ze znniejszoną redukcją szumu. Jak widać na rys .11 zmniejszenie  $\alpha$  które powoduje zwiększenie redukcji szumu zwiększa czas potrzebny sygnałowi wyjściowemu na reakcję i stabilizację.

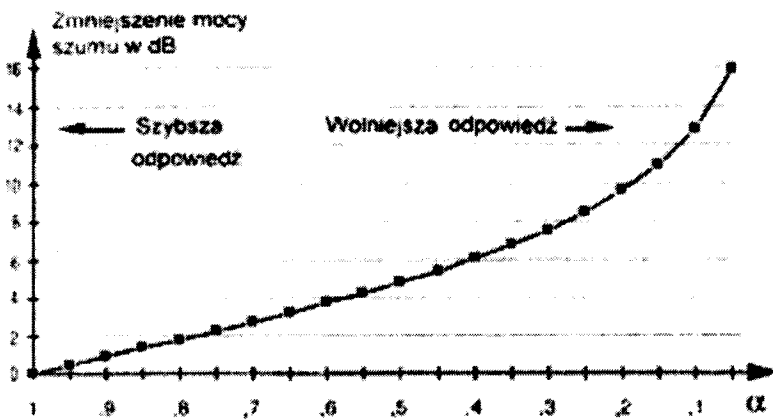
Dla uśredniania wykładniczego zmniejszenie wariancji szumów jako funkcję współczynnika wagowego  $\alpha$  można przedstawić

$$SNR_{sz} = \frac{\alpha}{2 - \alpha}$$

Zmniejszenie mocy szumu w dB dla uśredniania wykładniczego zapisujemy:

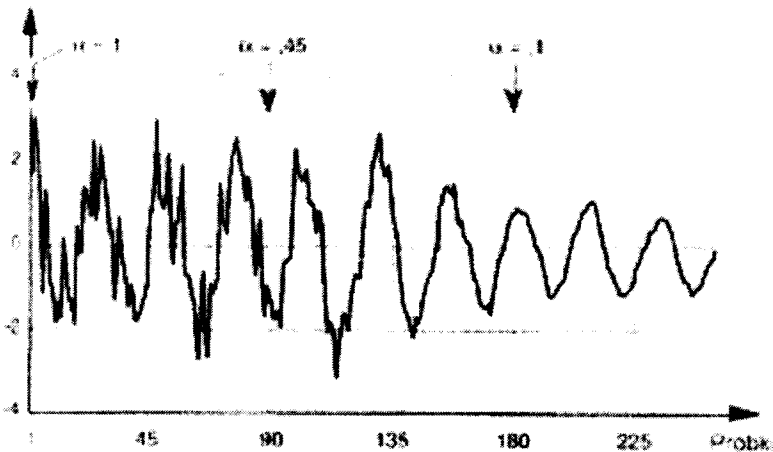
$$SNR_{sz,db} = 10 \log_{10} \left( \frac{\alpha}{2 - \alpha} \right)$$

Powyższe równanie przedstawia zależność między zmniejszaniem szumu a szybkością systemu uśredniania wykładniczego, co można zaobserwować także na rys .12



Rys. 12 Zmniejszanie mocy szumu wykładniczego systemu uśredniającego w funkcji współczynnika  $\alpha$ .

Możliwości zmniejszenia mocy szumu systemu uśredniania wykładniczego przedstawia rys 13 na którym pokazano sygnał wyjściowy systemu uśredniania wykładniczego przy wejściowym sygnale będącym sumą sygnału cosinusoidealnego oraz szumu. Początkowo wartość współczynnika  $\alpha$  przyjmuje wartość 1 i maleje liniowo do wartości 0,1 którą to osiąga dla 180 próbek danych wejściowych. Zmniejszenie  $\alpha$  powoduje redukcję szumu ale także zmniejsza amplitudę sygnału.



Rys. 13 Redukcja szumu wyjściowego wykładniczego systemu uśredniającego w funkcji współczynnika  $\alpha$

```

%-----
%Skrypt 3. Uśrednianie wykładnicze.
clear all; subplot(111);clf;
okno=3;
fs=1000;
dt=1/fs;
t=0:dt:okno;
x=20*square(2*pi*t);
x2=x+10*randn(1,length(t));

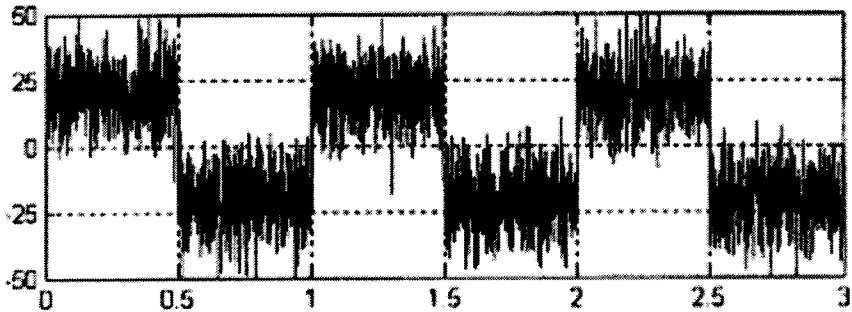
```

```

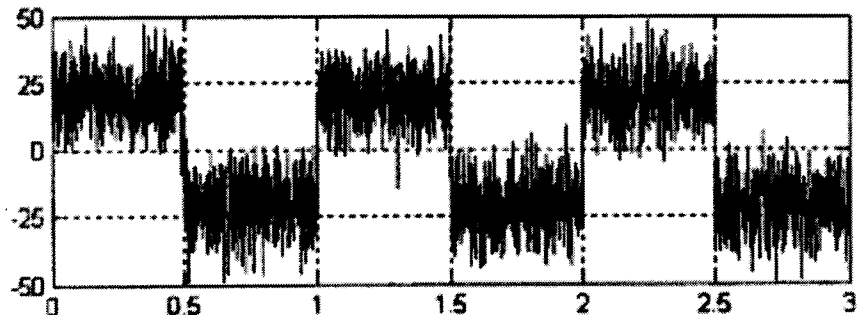
figure(2);subplot(2,1,1);
plot(t,x2,'r');grid;xlabel('t');ylabel('x2(t)');title('sygnal filtrowany');
set(gca,'YTick',-50:25:50)
ylim([-50 50])
set(gca,'YTickLabel',{'-50','-25','0','25','50'})
a=1.0;
y = zeros(1,3001);
for i=2:3001
    y(i)=a*x2(i)+(1-a)*y(i-1);
end
figure(2);subplot(2,1,2);
plot(t,y,'r');grid;xlabel('t');ylabel('y(t)');title('sygnal po filtracji');
set(gca,'YTick',-50:25:50)
ylim([-50 50])
set(gca,'YTickLabel',{'-50','-25','0','25','50'})
%-----

```

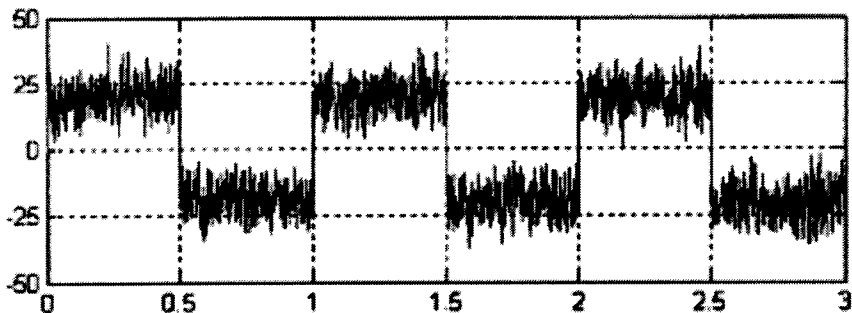
Poniżej przedstawiono przebiegi sygnału poddanego uśrednieniu wykładniczemu



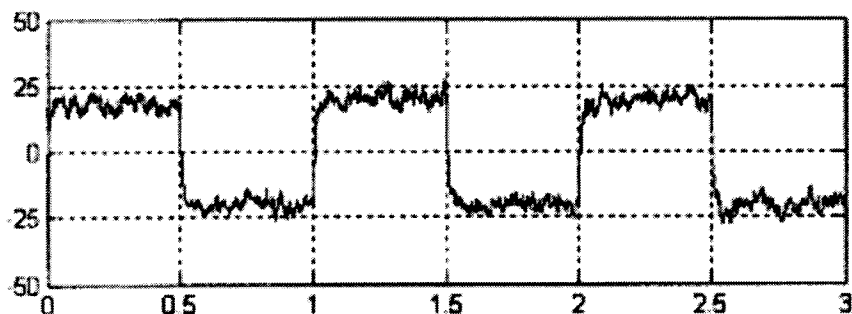
Rys. 14. Sygnal plus szum, uśrednienie wykładnicze dla  $\alpha=1$ .



Rys. 15. Sygnal plus szum, uśrednienie wykładnicze dla  $\alpha=0.9$



Rys. 16. Sygnał plus szum, uśredniczenie wykładnicze dla  $\alpha=0.5$



Rys. 17. Sygnał plus szum, uśredniczenie wykładnicze dla  $\alpha=0.1$

## 1.2 Metody najmniejszych kwadratów

### 1.2.1 Podstawy metody najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów jest jedną z najpopularniejszych metod statystycznych estymacji i wyznaczania nieznanymi parametrów równań przy zakładanej ich postaci na podstawie zbioru danych w postaci par liczb. Najczęściej jest stosowana przy regresji liniowej, ale może też być stosowana do statystycznego wyznaczania parametrów nieliniowych linii. Typowym przypadkiem zastosowania metody jest automatyka elektroenergetyczna, gdzie zazwyczaj jest znany model napięciowy i prądowy sygnałów a nie znane tylko niektóre parametry. Takim sygnałem jest np

$$x(t) = X_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi) + e(t) = X_{1c} \cos(\omega_1 t) + X_{1s} \sin(\omega_1 t) + e(t)$$

gdzie:  $\omega_1$  - znana pulsacja znamionowa;  $X_{1c} = X_{1m} \cos(\varphi)$ ,  $X_{1s} = X_{1m} \sin(\varphi)$  - wartości nieznane;  $e(t)$ - sygnał błędu, składowe harmoniczne nie wyróżnione w modelu sygnałowym w tym szumy.

Obliczając dwa nieznanne parametry sygnału np. amplitudę i fazę przy pomocy odpowiedniego algorytmu wykorzystujemy  $X_{1c}$  i  $X_{1s}$  które można traktować także jako składowe ortogonalne filtrów.

Po próbkowaniu sygnału trzymujemy zapis w postaci dyskretnej:

$$x(nT_p) = x(n) = X_{1c} \cos(n\Omega_1) + X_{1s} \sin(n\Omega_1) + e(n)$$

gdzie:  $\Omega_1 = \omega_1 T_p = 2\pi f_1 / f_p$  - jest pulsacją względną

Dotychczasowe rozważania dotyczyły sygnału w najprostszej jego postaci. Możliwe jest dostosowanie wzoru do naszych potrzeb jeśli chcemy dodatkowo wyróżnić k-tą harmoniczną to otrzymamy następujące równanie:

$$x(n) = X_{1c} \cos(n\Omega_1) + X_{1s} \sin(n\Omega_1) + X_{kc} \cos(nk\Omega_1) + X_{ks} \sin(nk\Omega_1) + e(n)$$

W zależności od potrzeb powyższy opis sygnału może być rozbudowywany z uwzględnieniem dodatkowych składowych harmonicznymi lub nie. Prowadzi to co prawda do dokładniejszego wyznaczenia obliczanych parametrów ale wymaga większej liczby próbek badanego sygnału. Sygnał o N próbkach i K nieznanych parametrach można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \dots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(0 \cdot \Omega_1) & \sin(0 \cdot \Omega_1) & \dots & \sin(0 \cdot \frac{K}{2} \Omega_1) \\ \cos(1 \cdot \Omega_1) & \sin(1 \cdot \Omega_1) & \dots & \sin(2 \cdot \frac{K}{2} \Omega_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos[(N-2) \cdot \Omega_1] & \dots & \dots & \sin((N-2) \cdot \frac{K}{2} \Omega_1) \\ \cos[(N-1) \cdot \Omega_1] & \dots & \dots & \sin((N-1) \cdot \frac{K}{2} \Omega_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1c} \\ X_{1s} \\ \dots \\ X_{\frac{K}{2}c} \\ X_{\frac{K}{2}s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \dots \\ e(N-2) \\ e(N-1) \end{bmatrix}$$

co w postaci ogólnej można przedstawić:

$$[x_N] = [h_N][X] + [e_N]$$

gdzie:  $[x_N]$  - N wymiarowy wektor próbek;  $[h_N]$  -  $N \times K$  wymiarowa macierz proponowanej postaci sygnału w kolejnych chwilach próbkowania;  $[e_N]$  - N wymiarowy wektor błędów.

Powyższy układ równań można rozwiązać tylko wtedy gdy liczba posiadanych próbek sygnału jest równa lub większa od liczby K nieznanych parametrów. Wymaga się także uzyskanie jak najmniejszego błędu tych ze parametrów.

$$[e]^T [e] = \sum_{n=0}^{N-1} e_n^2$$

Aby wyznaczone parametry były obarczone jak najmniejszym błędem średniokwadratowym obliczamy je wykorzystując równanie:

$$[\hat{X}] = [[h]^T [h]]^{-1} [h]^T [x]$$

gdzie  $[\hat{X}]$  jest wektorem nieznanych parametrów o zminimalizowanym błędzie średniokwadratowym.

Przykładowy skrypt realizujący przedstawiono poniżej:

```
%-----  
%Skrypt 4  
f1=50;fp=5000;A=20;w=2*pi*f1/fp;  
N1=fp/f1;  
t=0:1/fp:2/f1;  
x=A*cos(2*pi*f1*t);  
x2=x+0.5*A*randn(1,length(t));  
y=x2';  
d=length(t);  
h = zeros(d,2);  
for i=1:d  
    h(i,1)=[cos(i*w)];  
    h(i,2)=[sin(i*w)];  
end  
xx=(inv((h')*h)*h')*y;  
xs=xx(1,1)  
xc=xx(2,1)  
zz = zeros(1,d);  
for i=1:d  
    zz(i)=xs*cos(i*w)+xc*sin(i*w);  
end  
subplot(2,1,1);  
plot(t,x2,'r');grid;xlabel('t');ylabel('');title('sygnal estymowany');  
subplot(2,1,2);  
plot(t,zz,'r');grid;xlabel('t');ylabel('');title('sygnal po estymacji');  
%-----
```

## 2. Zadania pomiarowe.

- Wykonać symulacje z wykorzystaniem skryptów zawartych w programie.
- Zaobserwować przebiegi zaszumione poddane operacji uśredniania wykładniczego w układzie modelowym opisanym w dodatku do instrukcji.
- W sprawozdaniu zamieścić zarejestrowane wyniki symulacji i badań na modelu wraz z komentarzem.