

**Politechnika  Białostocka**

**Wydział Elektryczny**

**Katedra Telekomunikacji i Aparatury Elektronicznej**

Instrukcja do zajęć laboratoryjnych z przedmiotu:

**Przetwarzanie Sygnałów**

Kod: TS1A400027

Temat ćwiczenia:

**Analiza widmowa sygnałów. Zastosowanie i właściwości  
szybkiego przekształcenia Fouriera**

Opracował: dr inż. Dariusz Jańczak

Białystok 2014

**Temat: Analiza widmowa. Zastosowanie i właściwości szybkiego przekształcenia  
Fouriera.**

**1. Cel ćwiczenia**

Celem ćwiczenia jest pogłębienie i utrwalenie wiedzy studentów oraz nabycie przez nich umiejętności w zakresie analizy sygnałów w dziedzinie częstotliwości, przy zastosowaniu odpowiednich narzędzi programowych i sprzętowych. W trakcie zajęć studenci ugruntowują wiedzę na temat zastosowania i podstawowych właściwości dyskretnego przekształcenia Fouriera (DFT - *ang. Discrete Fourier Transform*) oraz szybkiego przekształcenia Fouriera (FFT- *ang. Fast Fourier Transform*). Studenci zdobywają umiejętność posługiwania się narzędziami analizy widmowej sygnałów. Studenci doskonają również umiejętność opracowania dokumentacji dotyczącej realizacji zadania inżynierskiego.

**2. Zagadnienia do opracowania przed przystąpieniem do zajęć**

2.1 Przed przystąpieniem do zajęć należy opracować (na podstawie materiałów z wykładu "Przetwarzanie Sygnałów 1") następujące zagadnienia teoretyczne:

- rodzaje przekształceń Fouriera pozwalające na wyznaczanie widma różnych typów sygnałów (ciągłe / dyskretne, nieokresowe / okresowe);
- wyznaczanie dyskretnej transformaty Fouriera i transformaty odwrotnej;
- podstawowe właściwości DFT.  
Należy zwrócić szczególną uwagę na:
  - a) związki między częstotliwością próbkowania i okresem powtarzania sygnału, a zakresem widma DFT i częstotliwościami wyznaczonych prążków widmowych;
  - b) okresowość widma i zjawisko nakładania się widm;
- szybkie przekształcenie Fouriera (FFT); podobieństwa i różnice między DFT oraz FFT;
- widmo sygnałów takich jak: sinusoidalny, impulsowy, prostokątny, trójkątny (ułatwieniem przy opracowaniu będą informacje podane w Dodatku 1. niniejszej instrukcji).

2.2. Osoby posiadające małe doświadczenie w programowaniu w środowisku Matlab powinny przeanalizować fragmenty programu zamieszczone w Dodatku 2.

### 3. Program ćwiczeń

3.1. Wyznaczyć widmo sygnału sinusoidalnego o parametrach zadanych przez prowadzącego. Porównać wartości teoretyczne z wynikami analiz FFT prowadzonych w środowisku programu Matlab oraz FFT wyznaczaną przez oscyloskop cyfrowy (wykorzystać pomiary z użyciem kursorów).

3.2. Zbadać zjawisko rozmywania widma na przykładzie transformaty FFT sygnału sinusoidalnego obliczanej przy różnych czasach obserwacji (zachować stałą częstotliwość próbkowania). Następnie sprawdzić wpływ okien czasowych. Powyższe wyniki uzyskane obliczeniowo (Matlab) porównać z obserwacjami i pomiarami oscyloskopowymi wykonanymi przy różnych typach okien.

3.3. Wyznaczyć FFT sygnału zadanego przez prowadzącego (uwaga: podany sygnał jest przebiegiem ciągłym).

Określić cechy otrzymanego widma (skok i zakres częstotliwości, liczba prążków, symetria, wartość prążka  $X(0)$ ).

Określić związek parametrów częstotliwościowych otrzymanego widma z parametrami czasowymi sygnału spróbkowanego.

Wyniki teoretyczne należy porównać z uzyskanymi obliczeniowo (Matlab) oraz z obserwacjami i pomiarami oscyloskopowymi. W przypadku pomiarów sprzętowych należy zwrócić uwagę na zjawisko aliasingu.

Do analiz mogą być przydatne dane zawarte w Dodatku 1.

3.4. Wyznaczyć transformatę odwrotną widma uzyskanego w punkcie 3.3. Podać jego cechy (skok i zakres czasowy, liczba próbek) i związek z pierwotnym sygnałem ciągłym.

3.5. Porównać widmo FFT z punktu 3.3. z teoretycznie wyznaczonym widmem sygnału ciągłego (można wykonać na etapie opracowania sprawozdania).

- 3.6. Zbadać wpływ zmiany częstotliwości próbkowania sygnału na otrzymane widmo (czas obserwacji sygnału nie ulega zmianie).
- 3.7. Zbadać wpływ zmiany długości czasu obserwacji sygnału (przy niezminionej częstotliwości próbkowania) na otrzymane widmo.
- 3.8. Zbadać zmiany wyznaczonego widma po uzupełnieniu zerami ciągu czasowego.
- 3.9. Sprawdzić cechę liniowości FFT na przykładzie transformaty sumy dwu sygnałów sinusoidalnych o różnych częstotliwościach. Wyniki uzyskane obliczeniowo (Matlab) porównać z obserwacjami i pomiarami oscyloskopowymi.
- 3.10. Zbadać wpływ przesunięcia sygnału w dziedzinie czasu na widmo amplitudowe i fazowe.
- 3.11. (dodatkowe) Zastosować FFT oraz IFFT (odwrotne FFT) do wyznaczenia splotu dwu ciągów. Porównać ze splotem wyznaczonym teoretycznie.

#### **4. Realizacja ćwiczeń**

##### 4.1. Badania symulacyjne

Badania symulacyjne należy przeprowadzić w środowisku programu Matlab.

Przydatne funkcje:

- `fft(X)` - szybkie przekształcenie Fouriera wektora  $X$  (ciągu próbek czasowych)
- `ifft(X)` - odwrotne przekształcenie Fouriera
- `real(X)` - część rzeczywista wektora liczb  $X$
- `imag(X)` - część urojona wektora liczb  $X$
- `abs(X)` - wartość bezwzględna elementów rzeczywistych wektora  $X$  lub moduł elementów zespolonych wektora  $X$
- `angle(X)` - kąt fazowy elementów zespolonych wektora  $X$  (w radianach)
- `unwrap(X)` - korekcja fazy elementów wektora  $X$  (wartości w radianach); polega na dodaniu do fazy wartości  $\pm 2\pi$
- `t = 0 : 0.1 : 10` - wektor wartości od 0 do 10, ze skokiem 0.1
- `sin(X)`, `cos(X)` - funkcje trygonometryczne
- `plot(t, s, 'b-o')` - wykreślenie rysunków

W Dodatku 2. zamieszczono fragmenty programów ułatwiające realizację ćwiczenia osobom posiadającym małe doświadczenie w programowaniu w środowisku Matlab (Zaleca się wstępną analizę programów przed ćwiczeniami laboratoryjnymi).

#### 4.2. Badania sprzętowe

Jako źródło sygnału należy wykorzystać generator pozwalający na uzyskanie sygnałów takich jak: sinusoidalny, trójkątny, prostokątny, impulsowy, szum, sygnały o modulacji AM, FM i inne.

Analizę widmową można przeprowadzić korzystając z transformaty FFT, która jest jedną z funkcji "math" oscyloskopów cyfrowych dostępnych w laboratorium.

Wywołanie i ustawienia w menu analizy FFT:

- a) "MATH";
- b) "Source " → wybrać kanał: CH1/CH2;
- c) wybrać okno: "Window Rectangular", "Window Blackman", "Window Hanning", "Window Flaptop";
- d) wybrać wzmocnienie: "Unit/div 20/10/5/1 dB"

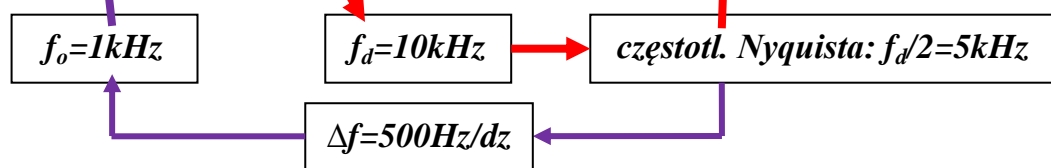
Do określenia częstotliwości próbkowania, przelicznika podziałki poziomej ekranu oscyloskopu na oś częstotliwości oraz parametrów wyświetlanego widma należy wykorzystać informacje przedstawiane na ekranie oscyloskopu, jak zostało przedstawione na Rys. 1. Przykłady zostały przedstawione dla oscyloskopów cyfrowych GW instek serii 800.

Pomiary częstotliwości oraz wysokości prążków można wykonać korzystając z kursorów, jak zostało przedstawione na Rys. 2.

Wywołanie menu kursorów pomiaru widma FFT:

- a) "CURSORS"
- b) "Source MATH"

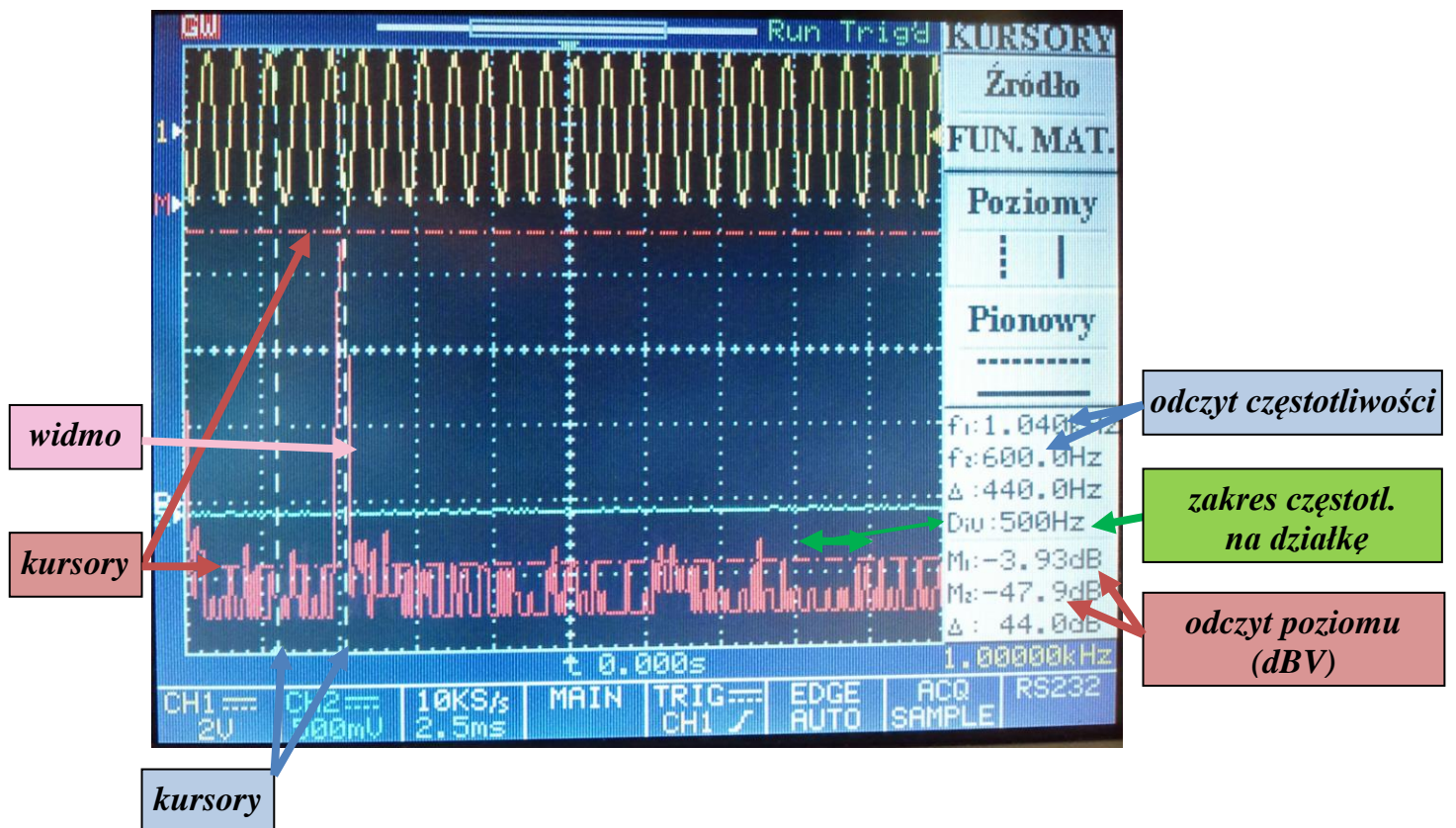
Marker "M►" zlokalizowany na lewej krawędzi ekranu oscyloskopu wskazuje poziom 0dB, przy czym w przypadku pomiaru sygnału napięciowego oznacza to 0 dBV, czyli odniesienie do 1V<sub>rms</sub>. Odniesienie to dotyczy również pomiarów z użyciem kursorów.



Rys. 1. Przykład określania punktów osi częstotliwości analizy FFT - badany przebieg sinusoidalny o  $f_o=1000\text{Hz}$  (podane przeliczenia  $f_d$  w przypadku bufora rejestrowanych danych o długości  $N=500$ )

Zalecenia dotyczące wyboru okien czasowych:

- "Window Rectangular" - dobra rozdzielczość częstotliwościowa i dokładność pomiaru amplitudy lecz widmo wrażliwe na efekt rozmywania,
- "Window Hanning" - dobra rozdzielczość częstotliwościowa,
- "Window Flaptop" - pozwala na dokładniejsze wyznaczenie amplitudy prążków widmowych.



Rys. 2. Pomiary z wykorzystaniem kursorów

### 5. Sprawozdanie powinno zawierać:

- opis realizacji poszczególnych punktów programu ćwiczenia;
- wnioski dotyczące badanych właściwości FFT;
- porównanie FFT z ciągłym przekształceniem Fouriera i DFT;
- analizę znaczenia doboru długości ciągu czasowego;
- wyniki i wnioski z obserwacji widma oraz analizę przelicznika osi czasu na oś częstotliwości w analizatorze widmowym;
- uwagi i wnioski nasuwające się w trakcie wykonywania ćwiczenia.

### 6. Wymagania BHP

W trakcie realizacji programu ćwiczenia należy przestrzegać zasad omówionych we wstępie do ćwiczeń, zawartych w: „Regulaminie porządkowym w laboratorium” oraz w „Instrukcji obsługi urządzeń elektronicznych znajdujących się w laboratorium z uwzględnieniem przepisów BHP”. Regulamin i instrukcja są dostępne w pomieszczeniu laboratoryjnym w widocznym miejscu.

## **7. Literatura**

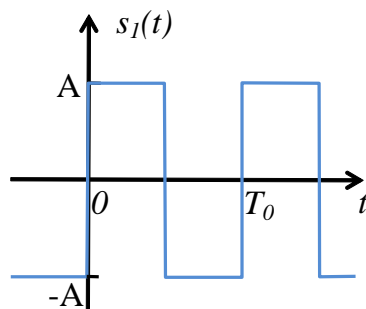
1. Szabatin J., *Podstawy teorii sygnałów*, WKŁ, Warszawa, 2007.
2. Zieliński T., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: od teorii do zastosowań*, WKŁ, Warszawa, 2009.
3. Lyons R., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, WKŁ, Warszawa, 2010.
4. Smith S. W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: praktyczny poradnik dla inżynierów i naukowców*, Wydawnictwo BTC, Warszawa, 2007.
5. Stranneby D., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: metody, algorytmy, zastosowania*, BTC, Warszawa, 2004.



## Dodatek 1

W dodatku zamieszczono szeregi i transformaty Fouriera wybranych sygnałów.

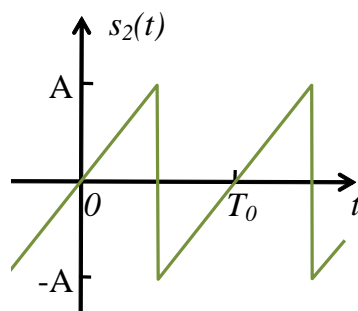
### D1.1 Sygnał prostokątny



Rys. D1.1 Sygnał prostokątny

$$s_1(t) = \frac{4A}{\pi} \left[ \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

### D1.2 Sygnał piłokształtny

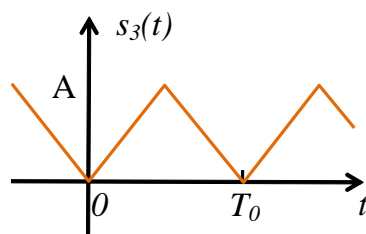


Rys. D1.2 Sygnał piłokształtny

$$b_{ns_2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2A}{\pi \cdot n}$$

$$s_2(t) = \frac{2A}{\pi} \left[ \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega_0 t) + \dots \right]$$

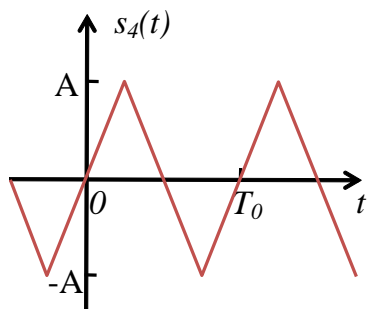
### D1.3 Sygnał trójkątny



Rys. D1.3 Sygnał trójkątny

$$s_3(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \left[ \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{25} \cos(5\omega_0 t) + \frac{1}{49} \cos(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

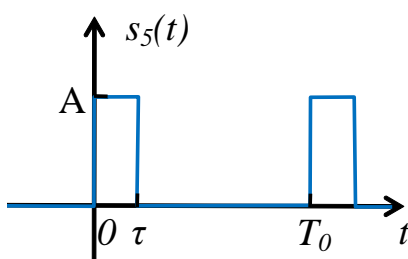
## D1.4 Sygnał trójkątny



Rys. D1.4 Sygnał trójkątny

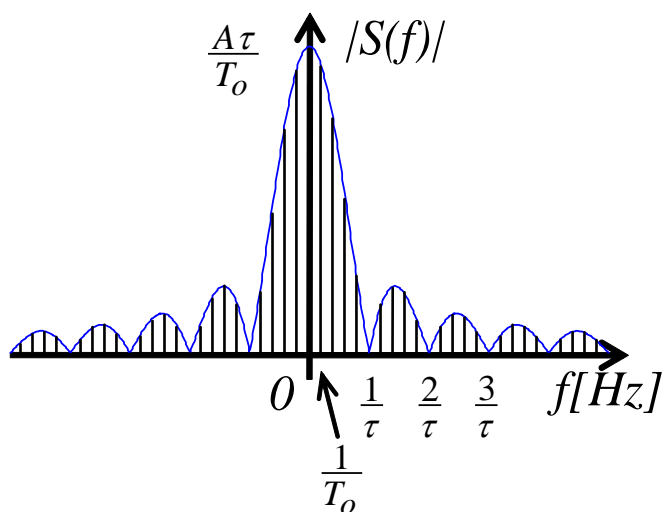
$$s_4(t) = \frac{4A}{\pi^2} \left[ \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{25} \sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{49} \sin(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

## D1.5 Sygnał impulsowy



Rys. D1.5 Sygnał impulsowy

$$X_n = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T_0}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T_0}} = A \frac{\tau}{T_0} \cdot Sa\left(n\pi \frac{\tau}{T_0}\right)$$



Rys. D1.6 Widmo sygnału impulsowego

## Dodatek 2.

W dodatku zamieszczono fragmenty programu ułatwiające realizację ćwiczenia osobom posiadającym małe doświadczenie w programowaniu w środowisku Matlab.

%Symulacje sygnału ciągłego i dyskretnego w środowisku Matlab można otrzymać poprzez odpowiedni dobór kroku czasowego:

```
% parametry czasu
To = 10e-3; % [s] czas obserwacji równy 10ms
Td = .1e-3; %[s] okres próbkowania równy 1ms
Tc = Td/100; %[s] krok czasowy do symulacji sygnału
ciągłego

% wektory czasu:
tc = 0 : Tc : To; % wektor chwil czasowych dla których
wyznaczane będą % wartości sygnału ciągłego s(t)
Nc = size(tc,2); %liczba punktów sygnału ciągłego

td = 0: Td : (To - Td);% wektor chwil czasowych (momenty
próbkowania) % dla których wyznaczane będą
wartości sygnału % dyskretnego s(kTd)
Nd = size(td,2); %liczba próbek

%*****
% Generacja przykładowych sygnałów
%*****

% Sygnał eksponencjalnie malejący
%-----
% parametry
tau=10e-3; % stała czasowa

% sygnał ciągły s(t)
sc_e = exp(-tc / tau); % wartości punktów sygnału ciągłego
s(t)

%Sygnał dyskretny z okresem próbkowania Td:
sd_e = exp(-td/ tau); % wartości próbek dyskretnego sygnału
s(kTd)

% Sygnał prostokątny
%-----
% parametry
A_p = 1; % amplituda
```

```

% sygnał ciągły s(t)
sc_p = [A_p*ones(1,round(Nc/2)), -A_p*ones(1,Nc-
round(Nc/2))];

%Sygnał dyskretny z okresem próbkowania Td:
sd_p = [A_p*ones(1,round(Nd/2)), -A_p*ones(1,Nd-
round(Nd/2))];

% Sygnał impulsowy
%-----
% parametry
tau_i = 1e-3; %czas trwania impulsu
A_i = 1; % amplituda

% sygnał ciągły s(t)
sc_i = zeros(1,Nc); sc_i(1,tc<=tau_i) = A_i;

%Sygnał dyskretny z okresem próbkowania Td:
sd_i = zeros(1,Nd); sd_i(1,td<tau_i) = A_i;

% Sygnał piłokształtny
%-----
% parametry
A_pi = 1; % amplituda

% sygnał ciągły s(t)
sc_pi = 2*A_pi*(tc/To); sc_pi(1,round((Nc+1)/2):Nc) =
sc_pi(1,round((Nc+1)/2):Nc) - 2*A_pi;

%Sygnał dyskretny z okresem próbkowania Td:
sd_pi = 2*A_pi*(td/To); sd_pi(1,round((Nd+1)/2):Nd) =
sd_pi(1,round((Nd+1)/2):Nd) - 2*A_pi;

%*****
% Rysunki
%*****

%wybór sygnału
sc = sc_e;
sd = sd_e;

%przebiegi czasowe (ciągły i dyskretny)
figure; hold on; grid on;
hp1 = plot(tc, sc, 'b-');
hp2 = plot(td, sd, 'ro');
pause

%Widmo (z wykorzystaniem FFT)

```

```
f = 0:1/To:1/Td-1/To; % wektor częstotliwości dla których
wyznaczane będą wartości prążków widmowych
Xsd = fft(sd); % widmo sygnału s(kTd)
```

```
figure; hold on; grid on;
plot(f, abs(Xsd)/Nd, ':o')
title(['Widmo amplit. sygnału s(kT_d); Td=', num2str(Td),
's; To=', num2str(To), 's'])
xlabel('f [Hz]')
pause
```

```
figure; hold on; grid on;
plot(f, angle(Xsd), ':o')
title(['Widmo fazowe sygnału s(kT_d); Td=', num2str(Td),
's; To=', num2str(To), 's'])
xlabel('f [Hz]'), ylabel('\phi(f) [rad]')
```